

Değişken Kesitli Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş Eliptik Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi

Timuçin Alp ASLAN^{1,a}

¹Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana, Türkiye

^aORCID: 0000-0002-7558-3568

Makale Bilgileri

Geliş : 22.09.2025

Kabul : 03.11.2025

DOI: 10.21605/cukurovaumfd.1789319

Sorumlu Yazar

Timuçin Alp ASLAN

taslan@cu.edu.tr

Anahtar Kelimeler

Eksenel fonksiyonel derecelenmiş

Eliptik kiriş

Serbest titreşim analizi

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

Laplace uzayı

Auf şekli: ASLAN, T.A., (2025). Değişken Kesitli Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş Eliptik Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Dergisi, 40(4), 867-874.

ÖZ

Bu çalışmada Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş (EFD) eliptik kirişlerin düzlem içi titreşim davranışı araştırılmıştır. Kayma deformasyon etkisinin göz önünde bulundurulduğu analizlerde eliptik kiriş, uzunluğu boyunca değişken kesite sahiptir. Elde edilen kanonik denklemler Laplace uzayında Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile çözülmüştür. Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanarak sınır koşullarının, minimum yarıçapın ve malzeme değişim katsayısı serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Elde edilen frekans değerleriyle ANSYS sonuçlarının uyum içerisinde olduğu görülmüş ve önerilen yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği ortaya konmuştur.

Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Elliptical Beams with Variable Cross Section

Article Info

Received : 22.09.2025

Accepted : 03.11.2025

DOI: 10.21605/cukurovaumfd.1789319

Corresponding Author

Timuçin Alp ASLAN

taslan@cu.edu.tr

Keywords

Axial functionally graded

Elliptical beams

Free vibration analysis

Complementary functions method (CFM)

Laplace domain

How to cite: ASLAN, T.A., (2025). Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Elliptical Beams with Variable Cross Section. Çukurova University, Journal of the Faculty of Engineering, 40(4), 867-874.

ABSTRACT

In this study, the in-plane vibration behavior of Axially Functionally Graded (AFG) elliptical beams is investigated. The elliptical beam has a variable cross-section along its length in the analyses where the shear deformation effect is considered. The obtained canonical equations are solved in the Laplace domain by the Complementary Functions Method (CFM). A computer program in Fortran language is prepared, and the effects of boundary conditions, minimum radius of elliptical beam, and material gradient index on the free vibration behaviour are studied in detail. It is seen that the ANSYS results are in harmony with the obtained frequency values, and the accuracy and reliability of the proposed method are demonstrated

1. GİRİŞ

Mühendislik ihtiyaçları doğrultusunda, yapısal mukavemetin artırılması ve malzeme kullanımının optimize edilmesi ortaya çıkmaktadır. Bu kapsamda, mekanik özellikleri sürekli değişen FD malzemeler mühendislik uygulamaları için yenilikçi çözümler sunmaktadır. Eliptik kemer geometrisi geniş açıklık geçme, yük dağılımını iyileştirme ve rijitliği artırma gibi avantajlar sağlarken; FD malzeme kullanımı ise stres konsantrasyonlarını azaltarak yapı ömrünü uzatmakta ve malzeme verimliliğini artırmaktadır. Bu tür yapısal elemanlar, köprü, tünel, sanayi yapıları ve enerji tesisleri gibi yüksek performans gerektiren uygulamalarda tercih edilmektedir. Bu nedenle eliptik kirişlerin serbest titreşim ve dinamik davranışının incelenmesi önem arz etmektedir.

Oh ve arkadaşları [1] eliptik kemerlerin serbest titreşim analizi üzerine çalışmalar gerçekleştirmiş ve bunları laboratuvar çalışmaları ile desteklemişlerdir. Nieh ve arkadaşları [2] eliptik kirişlerin titreşim davranışını analitik yöntemle araştırmışlardır. Mike [3] değişken kesite sahip eğri eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını matrikant yöntemiyle bulmuştur. Rajasekaran [4] diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak FD eliptik kirişlerin serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmiştir. Tsiatas ve Charalampakis [5] diferansiyel evrim yöntemini kullanarak EFD kemerlerin frekanslarını analiz etmişlerdir. Huynh ve arkadaşları [6] EFD eliptik kirişlerin titreşim analizini izogeometrik yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Jin ve arkadaşları [7] spektral örnekleme yüzey yöntemini kullanarak eğri eksenli kirişlerin frekanslarını belirlemişlerdir. Zhang ve Wang [8], FD eğri eksenli kirişlerin serbest titreşim analizini, Mori-Tanaka yöntemi ile modifiye Fourier serisi yaklaşımına dayalı olarak gerçekleştirmiştir. Yang ve arkadaşları [9] farklı kiriş teorilerini kullanarak eliptik kemerlerin serbest titreşim davranışını ortaya koymuşlardır. Eroğlu ve Tüfekçi [10] sonlu elemanlar yöntemini (SEY) kullanarak eliptik kirişlerin titreşim analizini incelemişlerdir. Noori ve arkadaşları [11-13] eğri eksenli kirişlerin serbest titreşim analizi üzerine çalışmalar yapmışlardır. Wan ve arkadaşları [14] değişken eğriliklere sahip FD Timoshenko kirişlerin statik analizini gerçekleştirmişlerdir. Qin ve arkadaşları [15], farklı sınır koşullarına sahip eğri eksenli kompozit kirişlerin serbest titreşim davranışlarını araştırmışlardır. Wang ve arkadaşları [16] kompozit eliptik kirişlerin titreşim analizini Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde gerçekleştirmişlerdir. Aydoğan ve arkadaşları [17] ANSYS programı aracılığıyla eliptik kirişlerin doğal titreşim frekanslarını bulmuşlardır. Ermis ve arkadaşları [18] karışık SEY kullanarak EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim karakteristiklerini araştırmışlardır. Luo ve arkadaşları [19] Euler-Bernoulli eğri kirişin dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Mohanty ve arkadaşları [20] eğri çubukların serbest titreşim analizini ANSYS yardımıyla gerçekleştirmiş ve sonuçları deneysel yöntemle birlikte vermişlerdir. EFD kirişinin frekanslarını ve mod şekillerini belirlemek için Lee ve arkadaşları [21] tarafından sayısal çözüm tekniği önerilmiştir. Nguyen [22] ve Nguyen ve arkadaşları [23] FD gözenekli ve FD sandviç eğri eksenli kirişleri analiz etmek için Ritz yöntemini kullanmışlardır. Jafari-Talookolaei ve arkadaşları [24] kompozit eğri eksenli kirişin serbest titreşimlerini analiz etmek için yeni bir matematiksel modelleme kullanmışlardır.

Yapılan literatür incelemesi sonucunda, değişken kesitli EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim analizinin Laplace uzayında TFY kullanılarak gerçekleştirildiği herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle, mevcut çalışma bu alandaki boşluğu doldurmayı amaçlamakta olup, sınır koşullarının, minimum yarıçapın ve malzeme değişim katsayısının değişken kesitli EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2. YÖNTEM

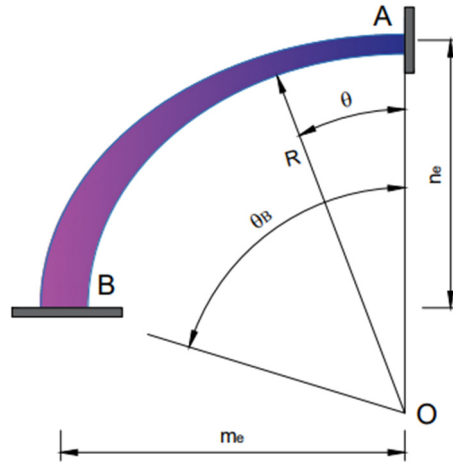
Şekil 1’de gösterilen değişken kesitli EFD düzlem eliptik kiriş, geometrisi ve malzeme özelliklerinin fonksiyonel değişkenliği dikkate alınarak modellenmiştir.

Eliptik kirişin malzeme değişim fonksiyonu (Elastisite modülü, E , kütleli yoğunluk, ρ , ve poisson oranı, ν) Eşitlik 1’de, kesit değişim fonksiyonu ise Eşitlik 2’de verilmektedir.

$$P(x) = (P_A - P_B) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_B}\right)^{nz} + P_B \quad (1)$$

$$h(\theta) = h(0) * \left(1 + \frac{2\theta}{\pi}\right) \quad (2)$$

Burada P_A ve P_B sırasıyla metal ve seramiğin malzeme özellikleridir. Kirişin malzemesi $\theta = 0$ da metal $\theta = \theta_B$ de seramik olarak kabul edilmektedir. n_z malzeme değişim katsayısıdır.



Şekil 1. Değişken kesitli EFD eliptik kiriş

Düzlemi içinde yüklü çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin kanonik formu Eşitlik (3-8)'de verilmektedir.

$$\frac{\partial U_t}{\partial \theta} = U_n + r_e \frac{T_t}{E(\theta)A(\theta)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \theta} = -U_t + r_e \Omega_b + r_e \frac{T_n \alpha_n}{G(\theta)A(\theta)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial \theta} = r_e \frac{M_b}{E(\theta)I_b(\theta)} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial \theta} = r_e \rho(\theta) A(\theta) \frac{d^2 U_t}{dt^2} + T_n - r_e p_t \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \theta} = r_e \rho(\theta) A(\theta) \frac{d^2 U_n}{dt^2} - T_t - r_e p_n \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial \theta} = r_e \rho(\theta) I_b(\theta) \frac{d^2 \Omega_b}{dt^2} - r_e T_n - r_e m_b \quad (8)$$

Burada U_t ve U_n yer değiştirmenin teğetsel ve normal, Ω_b ise dönmenin bileşenidir. T_t ve T_n iç kuvvetlerin teğetsel ve normal bileşenleri, M_b ise eğilme momentidir. α_n , $G(\theta)$, $A(\theta)$, $I_b(\theta)$, p_t , p_n , m_b sırasıyla kayma düzeltme faktörünü, kayma modülünü, kesit alanını, atalet momentini, dış yayılı yükleri ve momentini ifade etmektedir.

Eliptik kemerin eğrilik yarıçapı $re = \frac{m_e^2 n_e^2}{\sqrt{(m_e^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)^3}}$ şeklindedir [16].

Değişken kesitli EFD eliptik kirişlerin davranışını idare eden eşitliklerin (3-8) Laplace dönüşümü alınırsa, kısmi diferansiyel denklemler cebrik denklem takımı haline dönüşmektedir. Laplace uzayında EFD çubukların dinamik davranışını ifade eden adi diferansiyel denklem takımı kanonik formda Eşitlik (9-14)'de sunulmuştur.

$$\frac{d \bar{U}_t}{d \theta} = \bar{U}_n + r_e \frac{\bar{T}_t}{E(\theta)A(\theta)} \quad (9)$$

$$\frac{d \bar{U}_n}{d \theta} = -\bar{U}_t + r_e \bar{\Omega}_b + r_e \frac{\bar{T}_n \alpha_n}{G(\theta)A(\theta)} \quad (10)$$

$$\frac{d \bar{\Omega}_b}{d \theta} = r_e \frac{\bar{M}_b}{E(\theta)I_b(\theta)} \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\theta} = r_e z^2 \rho(\theta) A(\theta) \bar{U}_t + \bar{T}_n - r_e \bar{p}_t \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\theta} = r_e z^2 \rho(\theta) A(\theta) \bar{U}_n - \bar{T}_t - r_e \bar{p}_n \quad (13)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{d\theta} = r_e z^2 \rho(\theta) I_b(\theta) \bar{\Omega}_b - r_e \bar{T}_n - r_e \bar{m}_b \quad (14)$$

Üst çizgi ($\bar{}$) ile gösterilen terimler, ilgili büyüklüklerin Laplace dönüşümünü ifade eder. Kompleks bir değişken olan Laplace parametresi z , serbest titreşim analizlerinde $z = i\omega$ dönüşümüyle tanımlanır. Bu analizlerde dış yükler sıfır alınarak, katsayılar matrisinin determinantını sıfırlayan değerler doğal frekansları verir. Frekans uzayında elde edilen diferansiyel denklemler, Runge-Kutta 5 (RK5) algoritması kullanılarak TFY yöntemi ile sayısal olarak çözülmektedir [25,26].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada, çeşitli malzeme değişim katsayılarına, farklı minimum yarıçap uzunluklarına ve çeşitli sınır şartlarına (Çizelge 1) sahip EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim frekansları sayısal olarak incelenmiştir. Eliptik kiriş için kesit ve malzeme özelliklerinin değişimi eksenel doğrultuda fonksiyonel olarak dikkate alınmıştır. Sayısal çözüm süreci, Laplace uzayında TFY kullanılarak yürütülmüş ve bu amaçla Fortran programlama diliyle özel bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Elde edilen bulgular, çeşitli parametrelerin sistemin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkilerini ortaya koymak amacıyla çizelgeler hâlinde sunulmuş ve karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

Çizelge 1. Analizlerde kullanılan sınır şartları

Ankastre uç (A)	$U_t = U_n = \Omega_n = 0$
Sabit-Basit uç (B)	$U_t = U_n = M_b = 0$
Serbest uç (S)	$T_t = T_n = M_b = 0$

Yapılan parametrik analizlerde, modelin tanımlanmasında ve sayısal hesaplamaların gerçekleştirilmesinde, Çizelge 2’de sunulan malzeme özellikleri esas alınmıştır.

Çizelge 2. Analizlerde kullanılan malzemelerin mekanik özellikleri

Malzeme	E (Gpa)	ρ (kg/m³)	ν
Metal (P_A)	320.24	4429	0.2981
Seramik (P_B)	105.7	3750	0.26

Analizlerde kullanılan eliptik kirişin geometrik özellikleri aşağıda sunulmuştur.

Eliptik kirişin maksimum yarıçapı 10 m. dir.

Kesit yarıçapı, $h(0) = 0.25$ m olmak üzere kesit alanı ise

$A(\theta) = \pi * h(\theta)^2$ olarak hesaplanmaktadır.

Eğilme rijitliği $I_b(\theta) = \pi * \frac{h(\theta)^4}{4}$ ve

Kayma düzeltme faktörü 1.11 olarak alınmıştır.

3.1. Doğrulama Analizi

İlk olarak, önerilen yöntemin doğruluğunu ve geçerliliğini değerlendirmek amacıyla, A–S ve A–A sınır koşullarına sahip, minimum yarıçapı 7.5 m olan, sabit kesitli bir eliptik kiriş ele alınmıştır. Karşılaştırma yapmak üzere, aynı kiriş ANSYS [27] programında üç düğümlü BEAM189 elemanı kullanılarak modellenmiş ve yapı 20 elemana bölünmüştür. EFD eliptik kirişlerin BEAM189 sonlu elemanı ile

çözümlemesi için, kullanılan malzeme fonksiyonu için daha önce Excel üzerinde hazırlanmış 20 eleman için malzeme kodları ANSYS programına tanıtılmıştır. Malzeme değişim katsayısı ($nz = 0$ ve 2) için önerilen yöntemle elde edilen doğal frekans değerleri, ANSYS analizlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve bulgular Çizelge (3–4)’te karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 3. A-S sınır koşullarına sahip eliptik kirişe ait karşılaştırmalı frekans değerleri (Hz.)

nz	0			2		
Mod	ANSYS	TFY	FARK (%)	ANSYS	TFY	FARK (%)
1	1.875	1.875	0.00	3.239	3.175	1.98
2	9.107	9.107	0.00	14.935	14.408	3.53
3	27.211	27.219	0.03	43.029	41.424	3.73
4	55.506	55.530	0.04	86.775	83.570	3.69
5	91.758	91.789	0.03	143.413	138.205	3.63

Çizelge 4. A-A sınır koşullarına sahip eliptik kirişe ait karşılaştırmalı frekans değerleri (Hz.)

nz	0			2		
Mod	ANSYS	TFY	FARK (%)	ANSYS	TFY	FARK (%)
1	27.354	27.367	0.05	41.664	40.255	3.39
2	48.568	48.596	0.06	74.249	71.398	3.84
3	83.372	83.3956	0.03	124.027	119.281	3.83
4	94.405	94.48240	0.08	144.569	139.516	3.50
5	142.963	143.0899	0.09	218.271	210.771	3.43

Malzeme değişim katsayısının 0 olduğu durumda (yani homojen kiriş), ANSYS ve TFY yöntemleri arasında son derece yüksek bir uyum mevcuttur. Beş modun tamamında fark %0.09’ın altındadır. Bu durum, önerilen sayısal yöntemin doğruluğunu ve güvenilirliğini açık biçimde göstermektedir. Malzeme değişim katsayısı 2’ye çıkarıldığında, TFY yöntemiyle elde edilen doğal frekanslar ANSYS sonuçlarına göre %1.98–3.84 aralığında daha düşük çıkmıştır. Bu fark, malzeme gradyanındaki değişim nedeniyle malzeme özelliklerinin eksenel yönde sürekli olarak değişmesi ve buna bağlı olarak sistemin etkin rijitliğinin farklı şekilde modellenmesinden kaynaklanmaktadır. Elde edilen değerler, EFD eliptik kirişlere ait serbest titreşim frekanslarının belirlenmesinde etkin bir şekilde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

3.2. Farklı Parametrelerin Serbest Titreşim Davranışına Etkisi

Bu bölüm kapsamında, kesit değişimi, malzeme değişim katsayısı, minimum yarıçap uzunluğu ve sınır şartları gibi parametrelerin, EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak irdelenmiş ve değerlendirilmiştir. Elde edilen bulgular, her bir parametrenin sistemin dinamik davranışı üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymak amacıyla, ilgili alt başlıklar altında sunulmuştur.

3.2.1. Kesit Değişiminin Etkisi

Malzeme değişim katsayısı 5 olan eliptik kirişler üzerinde yapılan analizlerde, kesit değişiminin serbest titreşim frekansı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu kapsamda, farklı sınır şartlarına (B–B ve A–B) sahip, minimum yarıçapı 7.5 m olan EFD eliptik kirişler ele alınmış; bu kirişler hem sabit hem de değişken kesitli olarak modellenmiştir. Her bir durumda doğal frekans değerleri hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar, kesit özelliklerinin sistemin titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini karşılaştırmalı olarak ortaya koymak amacıyla Çizelge 5’de verilmiştir.

Çizelge 5. A-A sınır koşullarına sahip eliptik kirişe ait karşılaştırmalı frekans değerleri (Hz.)

Mod	B-B		A-B	
	Sabit kesitli	Değişken kesitli	Sabit kesitli	Değişken kesitli
1	28.399	40.032	35.941	54.510
2	64.863	85.018	72.740	89.621
3	113.529	121.791	127.501	133.222
4	134.696	167.086	144.520	188.268
5	199.324	259.88	217.312	281.816

Çizelge 5’den görüldüğü üzere değişken kesitli kirişlerin doğal frekansları, her iki sınır koşulunda da sabit kesitli kirişlere göre daha yüksektir. Bu artış, kesitin eğrilik boyunca değişmesiyle rijitliğin artması sonucu sistemin titreşim frekansının yükselmesinden kaynaklanmaktadır.

3.2.2. Malzeme Değişim Katsayısının Etkisi

Bu uygulamada malzeme değişim katsayısının EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim üzerine etkisi araştırılmıştır. Çeşitli malzeme değişim katsayılarında ($n_z = 1, 2$ ve 5) Minimum yarıçapı 5 m olan EFD eliptik kirişler için farklı sınır şartlarında (A-A,B-B,A-S) frekans değerleri hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 6’da sunulmuştur.

Çizelge 6. Malzeme değişim katsayıları için değişken kesitli EFD eliptik kiriş frekansları (Hz.)

n_z	A-A			B-B			A-S		
	1	2	5	1	2	5	1	2	5
1	53.937	58.423	65.735	34.436	37.944	43.291	6.804	7.574	8.5733
2	74.868	81.621	92.624	68.873	75.222	85.854	27.265	29.884	33.371
3	130.208	141.361	158.658	100.845	109.844	124.588	64.971	70.877	79.937
4	188.581	205.186	230.158	148.054	162.421	183.991	117.693	128.542	145.261
5	268.146	292.106	327.616	229.376	251.293	284.347	178.035	195.622	222.298

Çizelge 6’ya bakıldığında tüm sınır şartlarında malzeme değişim katsayısı arttıkça doğal frekanslarında arttığı gözlenmektedir. Bu davranış, malzeme değişim katsayısı arttıkça EFD kirişindeki seramik varlığının artmasıyla rijitliğin artmasına bağlanmaktadır.

3.2.3. Sınır Şartlarının Etkisi

Diğer bir uygulamada sınır şartlarının EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışına etkisi incelenmiştir. Minimum yarıçapı 7.5 m olan farklı sınır şartlarındaki (A-A,A-B,B-B,A-S) değişken kesitli EFD eliptik kirişlerin çeşitli malzeme değişim katsayısındaki ($n_z = 1$ ve 2) serbest titreşim frekansları hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 7’de verilmiştir.

Çizelge 7. Sınır şartları için değişken kesitli EFD eliptik kiriş frekansları (Hz.)

<i>nz</i>	1				2			
Mod	A-A	A-B	B-B	A-S	A-A	A-B	B-B	A-S
1	86.270	78.342	61.784	13.505	94.605	86.008	68.566	14.876
2	101.005	92.750	86.197	44.923	109.998	101.516	94.535	49.323
3	190.693	173.962	146.961	105.092	207.984	190.279	162.015	115.547
4	261.447	250.960	237.371	179.478	285.999	274.876	261.361	198.272
5	319.783	308.968	300.224	224.725	350.008	338.643	328.719	249.343

Çizelge 7 incelendiğinde elde edilen her iki malzeme değişim katsayısı için de en yüksek doğal frekans değerlerinin A-A sınır koşulunda, en düşük değerlerin ise A-S sınır koşulunda gözlemlendiği anlaşılmaktadır. Buradan da anlaşıldığı üzere kiriş iki ucundan da deplasmanı ve dönmesi engellendiğinden en rijit hâline gelmektedir.

3.2.4. Minimum Yarıçap Değişiminin Etkisi

Gerçekleştirilen parametrik çalışmalarda son olarak ise eliptik kirişin minimum yarıçap değişiminin ($n_e = 5, 7.5, 10$) serbest titreşim frekansları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Malzeme değişim katsayısı 2 olan farklı sınır şartlarındaki (A-A,A-B,A-S) değişken kesitli EFD eliptik kirişler için frekans değerleri bulunmuş ve sonuçlar Çizelge 8’de sunulmuştur.

Çizelge 8. Minimum yarıçaplar için değişken kesitli EFD eliptik kiriş frekansları (Hz.)

Mod	A-A			A-B			A-S		
	5	7.5	10	5	7.5	10	5	7.5	10
1	58.423	58.130	48.664	49.201	48.831	41.753	7.574	7.495	6.545
2	81.620	80.550	78.578	75.228	79.015	75.533	29.884	25.520	21.703
3	141.361	128.200	118.572	128.272	118.695	113.705	70.887	62.566	55.137
4	205.186	183.906	160.894	189.050	168.656	147.488	128.542	117.515	104.213
5	292.106	270.460	240.420	274.352	252.763	224.297	195.622	186.232	166.461

Çizelge 8 incelendiğinde eliptik kirişin yarıçapının artması durumunda her üç sınır şartı için de frekans değerinin azaldığı görülmektedir. Özellikle elipsin daireye (minimum yarıçap=maksimum yarıçap yaklaştığı) durumda düşüş daha da belirgin olmaktadır. Bu durumda kirişin daha esnek davranmaya başlamakta ve titreşimlere karşı daha duyarlı hale gelmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, değişken kesitli EFD eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışı incelenmiştir. Elde edilen kanonik denklemler, Laplace uzayında TFY kullanılarak çözülmüş ve çözüm süreci için Fortran dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Program aracılığıyla, kesit değişiminin, malzeme değişim katsayısının, sınır koşullarının ve minimum yarıçap uzunluğunun EFD kirişin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Yapılan analizler sonucunda ulaşılan önemli bulgular aşağıda maddeler hâlinde verilmiştir.

- Elde edilen doğal frekans değerlerinin ANSYS sonuçlarıyla uyum göstermesi, önerilen yöntemin doğruluğunu ve güvenilirliğini ortaya koymuştur.
- Değişken kesitli kirişlerin doğal frekanslarının farklı sınır koşullarında sabit kesitli kirişlere göre daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Bu artış, kesitin eğrilik boyunca değişmesiyle rijitliğin artmasına ve dolayısıyla sistemin titreşim frekansının yükselmesine bağlanmıştır.
- Tüm sınır koşullarında, malzeme değişim katsayısının artışıyla birlikte doğal frekansların yükseldiği belirlenmiştir. Bu durum, seramik bileşen oranının artmasına bağlı olarak malzeme rijitliğinin artmasıyla açıklanmaktadır.
- Ayrıca, en yüksek doğal frekansların A–A sınır koşulunda, en düşük değerlerin ise A–S koşulunda elde edildiği görülmüştür. Bu, iki ucun da kısıtlandığı A–A koşulunda sistemin en rijit hâline ulaşmasından kaynaklanmaktadır.
- Bunun yanında, minimum yarıçap arttıkça tüm sınır koşullarında doğal frekansların azaldığı gözlenmiştir. Elipsin daireye yaklaştığı durumda bu düşüş daha belirgin olup, kirişin esnekliğinin artmasıyla ilişkilidir.

5. KAYNAKLAR

1. Oh, S.J., Lee, B.K. & Lee, I.W. (2000). Free vibrations of non-circular arches with non-uniform cross-section. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4871-4891.
2. Nieh, K.Y., Huang, C.S. & Tseng, Y.P. (2003). An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches. *Computers & Structures*, 81, 1311-1327.
3. Mike, C.Ö. (2004). Değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşimlerinin matris yöntemiyle incelenmesi. *Doktora tezi*. İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
4. Rajasekaran, S. (2014). Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica*, 49, 863-886.
5. Tsiatas, G.C. & Charalampakis, A.E. (2017). Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures*, 160, 256-266.
6. Huynh, T.A., Luu, A.T. & Lee, J. (2017). Bending, buckling and free vibration analyses of functionally graded curved beams with variable curvatures using isogeometric approach. *Meccanica*, 52, 2527-2546.
7. Jin, G., Ye, T. & Su, Z. (2017). Elasticity solution for vibration of 2-D curved beams with variable curvatures using a spectral-sampling surface method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111, 1075-1100.
8. Zhang, C. & Wang, Q. (2019). Free vibration analysis of elastically restrained functionally graded curved beams based on the Mori–Tanaka scheme. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(1), 1821-1831.
9. Yang, F., Sedaghati, R. & Esmailzadeh, E. (2018). Free in-plane vibration of curved beam structures: A tutorial and the state of the art. *Journal of Vibration and Control*, 24, 2400-2417.
10. Eroğlu, U. & Tufekci, E. (2018). A new finite element formulation for free vibrations of planar curved beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 46, 730-750.

11. Noori, A.R., Aslan, T.A. & Temel, B. (2018). An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*, 200, 701-710.
12. Aslan, T.A., Noori, A.R. & Temel, B. (2019). In-plane free vibration frequencies of stepped circular beams. *ALKÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 1(1), 1-7.
13. Temel, B., Aslan, T.A. & Noori, A.R. (2021). In-plane vibration analysis of parabolic arches having a variable thickness. *International Journal of Dynamics and Control*, 9(3), 910-921.
14. Wan, Z.Q., Li, S.R. & Ma, H.-W. (2019). Geometrically nonlinear analysis of functionally graded Timoshenko curved beams with variable curvatures. *Advances in Materials Science and Engineering*, 6204145.
15. Qin, B., Zhao, X., Liu, H., Yu, Y. & Wang, Q. (2020). Free vibration analysis of curved laminated composite beams with different shapes, lamination schemes, and boundary conditions. *Materials*, 13(4), 1010.
16. Wang, Q., Choe, K., Tang, J., Shuai, C. ve Wang, A. (2020). Vibration analyses of general thin and moderately thick laminated composite curved beams with variable curvatures and general boundary conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(12), 991-1005.
17. Aydoğan, G., Ermis, M., Aribas, U.N. & Omurtag, M.H. (2021). Free vibration analysis of axially functionally graded elliptical beams via finite element method. *Proc 22nd Natl Mech Congr, Çukurova Univ-Adana, Turkey*, 61-74.
18. Ermis, M., Akdoğan, G., Kir, O., Aribas, U.N. & Omurtag, M.H. (2022). The static and free vibration analyses of axially functionally graded elliptical beams via mixed FEM. *Journal of Structural Engineering and Applied Mechanics*, 22(5), 22-39.
19. Luo, J., Zhu, S. & Zhai, W. (2022). Formulation of curved beam vibrations and its extended application to train-track spatial interactions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 165, 108393.
20. Mohanty, N., Mishra, U.K. & Sahu, S.K. (2023). An adaptive neuro fuzzy inference system model for studying free in-plane and out-of-plane vibration behavior of curved beams. *Structures*, 47, 1836-1845.
21. Lee, J.K., Yoon, H.M., Oh, S.J. & Lee, B.K. (2024). Free vibration of axially functionally graded Timoshenko circular arch. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 68(2), 445-458.
22. Nguyen, N.D. (2025). Analysis of functionally graded porous curved beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical and Materials Design*, 1-24.
23. Nguyen, N.D., Bui, V.T., Nguyen, T.K. & Vo, T.P. (2025). Higher-order shear deformation theory and Ritz method for analysis of functionally graded sandwich curved beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1-18.
24. Jafari-Talookolaei, R.A., Ghandvar, H., Jumaev, E. & Mikhliev, O. (2025). Free vibrations of a laminated composite curved beam with arbitrary layouts. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 105(6), e70120.
25. Aslan, T.A., Noori, A.R. ve Temel, B. (2019). Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı FD düz eksenli kirişlerin serbest titreşim analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 34(4), 21-28.
26. Noori, A.R., Rasooli, H., Aslan, T.A., ve Temel, B. (2020). Fonksiyonel derecelenmiş sandviç kirişlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile statik analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 35(4), 1091-1102.
27. ANSYS®, *Academic Research Mechanical*, Release 2025 R1. ANSYS, Inc., Canonsburg, PA, USA.